Extremum et fonctions convexes

Table des matières

1 Fonctions convexes

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Fonction convexe*

Soit f une application réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **convexe** sur I si on a : $\forall (x_0, x_1) \in I^2, \forall t \in [0,1]$,

$$f\left(tx_0 + (1-t)\,x_1\right) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1).$$

Exemple 1. *Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 : *Fonction concave*

Soit f une application réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **concave** sur I si on a : $\forall (x_0, x_1) \in I^2, \forall t \in [0,1]$,

$$f\left(tx_0 + (1-t)\,x_1\right) \geq tf(x_0) + (1-t)f(x_1).$$

Exemple 2. *La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Propriété 1.3 : *Fonction opposée*

Soit f une application réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est convexe sur } I \quad \Leftrightarrow \quad -f \text{ est concave sur } I.$$

Exemple 3. *Les fonctions $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.*

1.2 Interprétation géométrique

Définition 1.4 : *Rappel : corde*

On appelle **corde** de C_f entre deux points x_0 et x_1 le segment reliant les points $M_0\ (x_0, f(x_0))$ et $M_1\ (x_1, f(x_1))$. Son équation est

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) + f(x_0) \qquad \text{avec } x \in [x_0, x_1].$$

L'ensemble des réels $tx_0 + (1-t)\,x_1$ lorsque t varie de 0 à 1 est le segment $[x_0, x_1]$. Si $x \in [x_0, x_1]$ alors on peut écrire $x = tx_0 + (1-t)\,x_1$ pour $t \in [0,1]$ on a

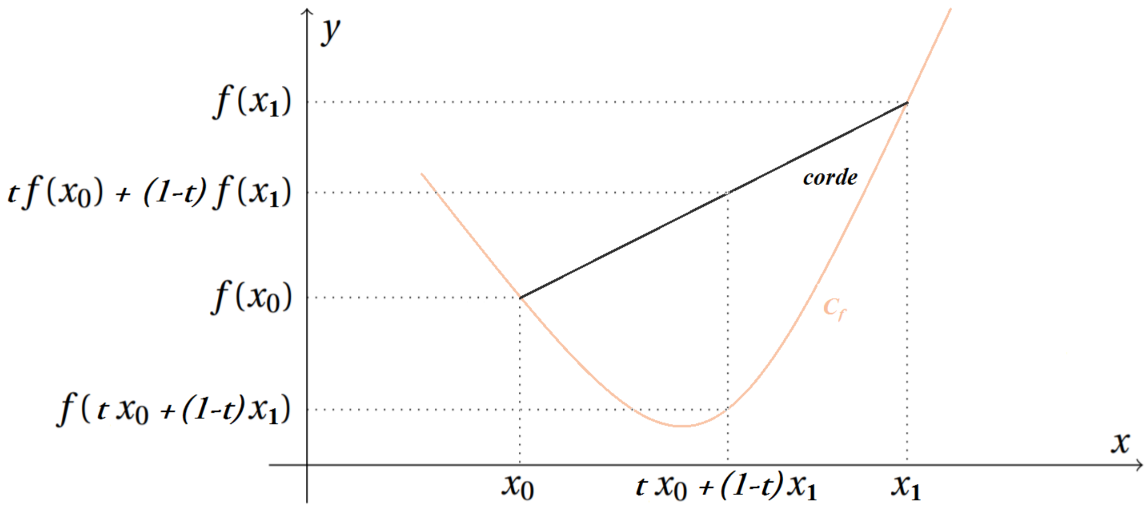
$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) + f(x_0) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(tx_0 + (1-t)\,x_1 - x_0) + f(x_0) \\
&= \left(f(x_1) - f(x_0)\right)(1-t) + f(x_0) \\
&= tf(x_0) + (1-t)f(x_1).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique (suivant le paramètre t) de l'ensemble des points de la corde

$$\left\{\left(tx_0 + (1-t)\,x_1, tf(x_0) + (1-t)f(x_1)\right) \text{ avec } t \in [0,1]\right\}.$$

Propriété 1.5 : *Convexité et cordes*

Une fonction f est convexe si sa courbe est en-dessous de ses cordes. Elle est concave si elle est au-dessus.



1.3 Inégalité de convexité

L'inégalité définissant une fonction convexe se généralise au cas de plus de 2 points.

Théorème 1.6 : *Inégalité de convexité*

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Pour $n \geq 2$, pour tout $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = 1,$$

alors pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\, x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k\, f\left(x_k\right).$$

Il existe également un résultat analogue pour les fonctions concaves.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n. □

Exemple 4 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** *Soit $n \geq 2$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Solution.

1.4 Caractérisation des fonctions convexes dérivables

1.4.1 Fonctions de classe C^1

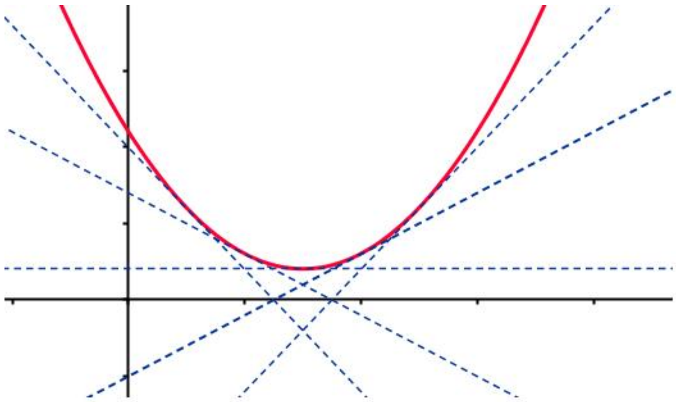
Théorème 1.7 : *Fonctions convexes de classe* C^1

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Alors, les propositions qui suivent sont équivalentes.

(i) f est convexe sur I.

(ii) f' est croissante sur I.

(iii) La courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes, i.e. $\forall (x, x_0) \in I^2,\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Exemple 5. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.

Solution.

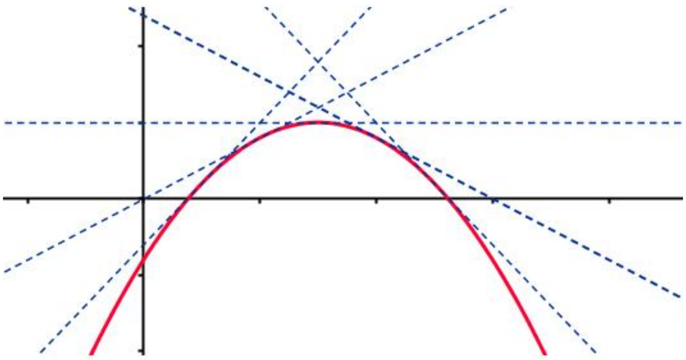
Théorème 1.8 : *Fonctions concaves de classe* C^1

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Alors, les propositions qui suivent sont équivalentes.

(i) f est concave sur I.

(ii) f' est décroissante sur I.

(iii) La courbe de f est en-dessous de toutes ses tangentes, i.e. $\forall (x, x_0) \in I^2,\ f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.



Exemple 6. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$.

Solution.

Les démonstrations de ces théorèmes sont admises.

1.4.2 Fonctions de classe C^2

Théorème 1.9 : *Fonctions convexes/concaves de classe C^2*

Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I.

$$f \text{ est convexe sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ f''(x) \geq 0.$$

$$f \text{ est concave sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ f''(x) \leq 0.$$

Démonstration. On reprend les théorèmes 1.7 et 1.8, comme f' est croissante (resp. décroissante) sur I, alors f'' est positive (resp. négative) sur I. □

Exemple 7. *Démontrer que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.*

Solution.

Exemple 8. *Démontrer que la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.*

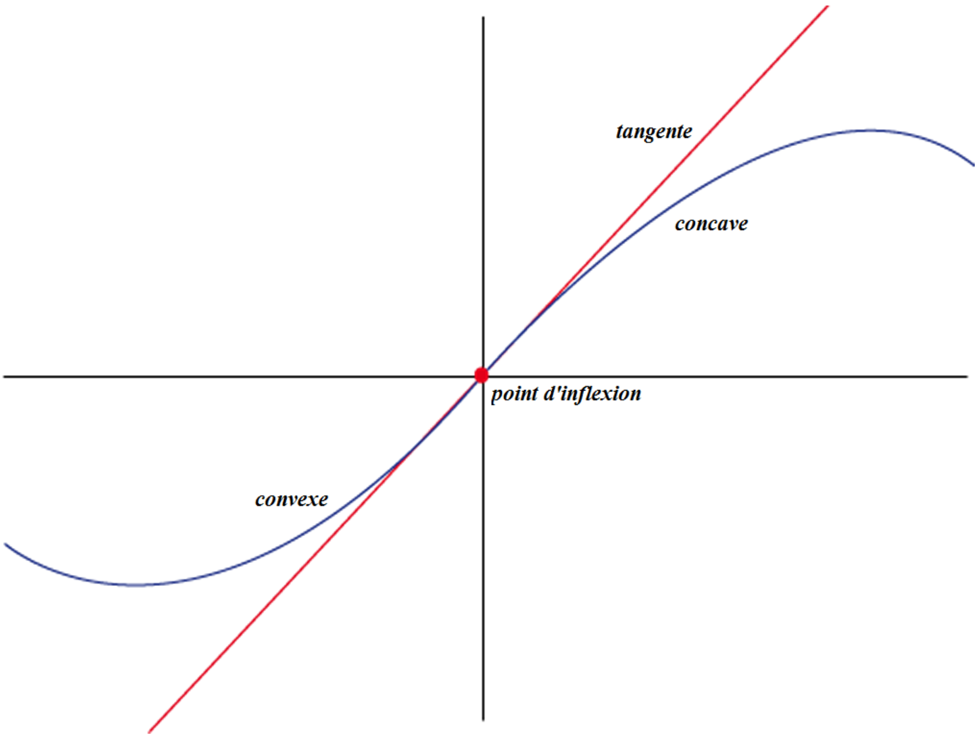
Solution.

1.5 Points d'inflexion

Définition 1.10 : *Point d'inflexion*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un point intérieur à I. On dit que x_0 est un **point d'inflexion** de f si f est concave au voisinage à gauche de x_0 et convexe au voisinage à droite de x_0, ou l'inverse.

Au niveau d'un point d'inflexion, la courbe de f change de sens de convexité. Elle traverse sa tangente.



Théorème 1.11 : *Point d'inflexion pour une fonction de classe C^2*

Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I et x_0 un point intérieur à I.

$$f \text{ admet un point d'inflexion en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' \text{ s'annule en } x_0 \text{ en changeant de signe.}$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 9. *Vérifier que la fonction La fonction $x \mapsto x^3$ possède un point d'inflexion en 0.*

Solution.

Exemple 10. *Etudier le sens de convexité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x-1)^2 + 1$.*

Solution.

2 Extrema d'une fonction d'une variable

Dans cette section, on rappelle et on complète quelques résultats des chapitres Limites et continuité et Dérivabilité du premier semestre.

2.1 Définitions

Définition 2.1 : *Rappel : Extremum*

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. On dit que f admet

- **un maximum global** sur A en x_0 lorsque
$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq f(x_0),$$
on note alors $f(x_0) = \max\limits_{x \in A} f(x)$.
- **un maximum local** sur A en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que
$$\forall x \in A \cap V, \quad f(x) \leq f(x_0),$$
- **un minimum global** sur A en x_0 lorsque
$$\forall x \in A, \quad f(x) \geq f(x_0),$$
on note alors $f(x_0) = \min\limits_{x \in A} f(x)$.
- **un minimum local** sur A en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que
$$\forall x \in A \cap V, \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Exemple 11. *Si $f(x) = (x-2)^2 + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$, alors f possède un minimum global en $x = 2$ mais n'a pas de maximum.*

Exemple 12. *Si $f(x) = x^3 - 3x$ pour $x \in \mathbb{R}$, alors f possède un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 1$ mais elle n'a pas d'extremum global.*

2.2 Extrema sur un segment

Théorème 2.2 : *Rappel : théorème des bornes*

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Théorème 2.3 : *Rappel : théorème des bornes, version équivalente*

Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.
Autrement dit, si on note $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, alors

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Exemple 13. *Si $f(x) = \sin(x)$ alors $f([0, \pi]) = [0, 1]$.*

Pour rappel, si on ne prend pas un segment, l'ensemble image n'est plus forcément un segment.

Exemple 14. *Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors f est continue sur $]0, 1]$ mais $f(]0, 1]) = [1, +\infty[$.*

2.3 Extrema sur un ouvert

Définition 2.4 : *Point critique*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On appelle **point critique** de f tout réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$.

Proposition 2.5 : *Rappel : condition nécessaire d'extremum local*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

$$f \text{ admet un extremum local en } x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ est un point critique de } f.$$

Exemple 15. *Cette condition est une condition nécessaire mais non suffisante, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$ s'annule en 0, mais la fonction n'y admet pas d'extremum local.*

De plus, si l'intervalle considéré n'est pas ouvert, le résultat de cette proposition tombe en défaut.

Exemple 16. *On considère*

$$\begin{array}{rccl} f : & [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

f atteint son maximum en 1 et pourtant $f'(1) = 1 \neq 0$.

Quand on recherche les extrema locaux d'une fonction, la proposition 2.5 donne donc seulement les points candidats à être des extrema locaux (ceux où la dérivée s'annule et que l'on appelle des points critiques).

Proposition 2.6 : *Condition suffisante d'extremum local*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f.

$$f' \text{ change de signe en } x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ est un extremum local de } f.$$

Démonstration. Admis. □

2.4 Extrema pour des fonctions de classe C^2

Théorème 2.7 : *Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique*

Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f.

(i) Si $f''(x_0) > 0$, alors f possède un minimum local en x_0.

(ii) Si $f''(x_0) < 0$, alors f possède un maximum local en x_0.

(iii) Si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien conclure.

Démonstration. Si f est de classe C^2, on peut utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 et on a pour $x \in I$ et $x_0 \in I$:

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right).$$

Or x_0 est un point critique donc on a

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right) \underset{x_0}{=} f(x_0) + (x - x_0)^2\left(\frac{f''(x_0)}{2} + o(1)\right).$$

Ainsi, si $f''(x_0) > 0$, $f(x) - f(x_0)$ est strictement positif sur un voisinage de x_0 exclu. La fonction f admet donc bien un minimum local en x_0.
Le raisonnement est similaire pour $f''(x_0) < 0$. □

Exemple 17. *Si $f(x) = x^4 - 2x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$, comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ alors*

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1) \qquad \textit{et} \qquad f''(x) = 12x^2 - 4.$$

Donc f possède un maximum local en $x = 0$ et deux minima locaux en $x = -1$ et en en $x = 1$.

Proposition 2.8 : *Extrema locaux et convexité*

Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I est convexe (respectivement concave), alors tout point critique de f est nécessairement un minimum (respectivement maximum) global.

Démonstration. Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I est convexe et x_0 un point critique de f, d'après le théorème 1.7, la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes,

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Comme $f'(x_0) = 0$, alors

$$\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0).$$

Le raisonnement est similaire pour f concave. □

2.5 Méthode pour la recherche des extrema

Définition 2.9 : *Rappel : ouverts*

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. L'intervalle $]a, b[$ est dit **ouvert**.

Définition 2.10 : *Rappel : fermés*

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ est dit **fermé**.

Méthode 2.11 : *Recherche des extrema d'une fonction*

On détermine si la recherche se fait sur un intervalle ouvert ou fermé.

(i) Si l'intervalle est ouvert, on cherche les points critiques (qui sont les seuls extrema possibles) puis on vérifie pour chacun de ces points si ce sont des extrema locaux ou non.

(ii) Si l'intervalle est fermé, on s'intéresse à l'ensemble des points qui ne sont pas sur les bords et on y cherche les extrema locaux. Puis on étudie ensuite les valeurs de la fonction sur les bords et on les compare aux extrema locaux trouvés.

Si le fermé est borné, l'intervalle est un segment et on est sûr de trouver un maximum et un minimum global.

Exemple 18. *Déterminer les extrema de la fonction définie sur* $]-2, 2[$ *par* $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$.

Solution.

Exemple 19. *Déterminer les extrema de la fonction définie sur* $[-4, 2]$ *par* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

Solution.